

Conceitos de Probabilidade e Estatística

Exercícios - Variáveis Aleatórias

2025/2026

39. Uma moeda viciada tal que $P(\text{"sair face comum"}) = 2/3$ é lançada três vezes.

- (a) Estude a variável aleatória, X , que representa o número de faces nacionais que ocorrem.
- (b) Determine a função de distribuição de X .
- (c) Calcule a probabilidade de obter mais de uma face nacional nos 3 lançamentos.

40. Considere a tabela seguinte:

x_i	0	1	2	3
p_i	1/8	1/4	1/2	1/8

- (a) Verifique que se trata de um modelo de probabilidade e identifique o seu suporte.
- (b) Determine a respetiva função de distribuição e represente-a graficamente.

41. Considere a v.a. X cuja função massa de probabilidade é dada por:

x_i	-1	0	1	2
p_i	1/5	1/3	p	1/4

- (a) Calcule o valor de p .
- (b) Determine a função de distribuição de X e represente-a graficamente.
- (c) Calcule $P(X > 0)$ e $P(X > 0 | X < 2)$.

42. No lançamento de um certo dado viciado, a v.a. que representa o número de pintas da face que fica voltada para cima segue uma distribuição cuja f.m.p. é dada por:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	θ	2θ	3θ	4θ	5θ	6θ

- (a) Determine a probabilidade de sair face com um número de pintas par.
- (b) Calcule a probabilidade de sair face com um número de pintas superior a 3.

43. A v.a. X tem função de distribuição dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & 0 \leq x < 1 \\ 2/3, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

- (a) Represente-a graficamente.
- (b) Determine a f.m.p. de X e represente-a graficamente.

44. Considere o seguinte modelo de probabilidade para a v.a. X que representa o número de automóveis procurados por dia num certo *stand* de automóveis.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	1/20	a	b	1/3	1/4

- (a) Sabendo que em 75% dos dias são procurados pelo menos dois automóveis, calcule a e b .
- (b) Represente graficamente a função massa de probabilidade obtida.
- (c) Calcule a probabilidade de virem a ser procurados três automóveis num dia em que a procura foi de pelo menos dois.

* 45. Sabendo que uma v.a. X tem função massa de probabilidade dada por: $P(X = k) = k/6$ para $k = 1, 2, 3$.

- (a) Verifique que se trata, efetivamente, de uma f.m.p..
- (b) Determine a respetiva f.d. e represente-a graficamente.

46. Dada a função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1/2 \\ -(kx^2 - 2kx + 2) & 1/2 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Determine k de forma que $F(x)$ seja f.d. de uma v.a. X contínua.
- (b) Calcule $P(X \leq 3/2)$ e $P(X < 3/4 | X > 1/2)$.
- (c) Determine s de modo que $P(X \leq s) = 1/2$. Como se denomina s ?

47. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} kx & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Determine k de modo que $f(x)$ seja f.d.p. de uma v.a. X .
- (b) Determine $P(1/2 < X < 3/4)$.
- (c) Determine $P(-1/2 < X < 1/2)$.

48. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < 1 \\ 4k & 1 < x < 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Determine o valor de k de modo que $f(x)$ seja uma função densidade de probabilidade.

(b) Calcule $P(0.5 < X < 2.4)$.

* 49. Considere a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

- (a) Determine a .
- (b) Determine a função de distribuição de X .
- (c) Calcule o valor b tal que a probabilidade de X exceder b seja igual a 0.05.

50. Seja X uma variável aleatória discreta com a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	0.1	0.3	0.1	0.2	0.3

- (a) Calcule $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.
- (b) Determine a função de distribuição de X .
- (c) Calcule $P(X \geq -1 | X < 2)$.
- (d) Determine a distribuição de probabilidades da variável aleatória $Y = X^2$.

51. Considere a seguinte função de distribuição correspondente a uma v.a. X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.2 & -1 \leq x < 0 \\ 0.6 & 0 \leq x < 1 \\ 0.85 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

- (a) Obtenha a mediana de X .
- (b) Obtenha a função massa de probabilidade de X .
- (c) Calcule:
 - i. $P(X < 2)$;
 - ii. $P(X < 2 | X \geq 0)$;
 - iii. $P(X > 1)$.
- (d) Determine a função massa de probabilidade de $Y = X^2 + 1$.

52. Seja X uma variável aleatória discreta com a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	$1 - 2k$	$k - 1$	k	$2k$
p_i	p	$3p$	p	p

- (a) Sabendo que $E(X) = 1/3$, calcule o valor de p e k .
- (b) Calcule $\text{Var}(X)$.
- (c) Determine a f.m.p. de $Y = X^2$.

* 53. Considere a função

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Verifique que é uma função de distribuição.

- (b) Determine a respetiva f.d.p.
- (c) Calcule o valor dos quartis.
- (d) Determine:
 - i. $P(X < 1/3)$;
 - ii. $P(-1 < X < 1/2)$;
 - iii. $P(X > 2/3)$.
- (e) Calcule $P(X > 0.4 \mid X \leq 0.5)$.
- (f) Determine o valor de s tal que $P(X > 2s) = 1/8$.

54. O consumo diário de açúcar (em centenas de quilos) numa dada fábrica de bolos pode ser modelado por uma variável aleatória cuja f.d.p. é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \vee x \geq 1 \\ 2x & 0 < x \leq 1/2 \\ -6x + 6 & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

- (a) Represente graficamente a função $f(x)$.
- (b) Confirme que $f(x)$ se pode considerar uma f.d.p.
- (c) Calcule a probabilidade de, num dia, a fábrica gastar:
 - i. no máximo 50 kg de açúcar;
 - ii. menos de 50 kg de açúcar;
 - iii. pelo menos 50 kg de açúcar.
- (d) Qual o consumo médio diário de açúcar nesta fábrica?

55. Considere a v.a. estudada no exercício 44.

- (a) Calcule o valor esperado para a procura diária de automóveis e o respetivo desvio padrão.
- (b) Determine a expressão da função de distribuição de X , represente-a graficamente e determine o valor dos quartis da distribuição.

56. Considerando o modelo estudado no exercício 42, determine:

- (a) o valor médio e a variância do modelo;
- (b) o valor médio e a variância de $Y=2X+3$;
- (c) a mediana e o quantil de probabilidade $2/3$ da distribuição e interprete estes valores.

57. Considere a v.a. estudada no exercício 43.

- (a) Determine o valor dos quartis e localize-os no gráfico da representação gráfica da função.
- (b) Calcule $E(2X - 2)$ e $Var(2X - 2)$.

* 58. Considerando o modelo estudado no exercício *45, determine $\chi_{1/2}$, $\chi_{1/3}$ e $\chi_{1/4}$.

59. A concentração (em ppm) de monóxido de carbono (CO) na atmosfera, numa determinada zona urbana, no período das 8h às 10h, pode ser considerada uma variável aleatória X com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3.4 e^{-3.4 x} & x > 0 \end{cases}$$

- (a) Determine a função distribuição de X .

- (b) Qual é a probabilidade de, numa amostra recolhida ao acaso naquele período, a concentração de CO exceder 2 ppm?
- (c) Determine as concentrações média e mediana de CO naquele período.
60. Seja X uma variável aleatória com valor médio μ e variância σ^2 . Seja $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Determine $E(Y)$, $\text{Var}(Y)$ e $E(Y^2)$.
61. Um fornecedor de um produto de laboratório tem uma capacidade de armazenamento de 150 kg. No início de cada mês é reposto o *stock* até à capacidade máxima de armazenamento. As vendas mensais deste produto (em centenas de kg) são bem modeladas por uma variável aleatória X , cujo comportamento é bem descrito pela seguinte função densidade de probabilidade
- $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 1.5 \\ 0 & \text{outros valores de } x \end{cases}$$
- (a) Determine a f.d. da v.a. X .
- (b) Se a dada altura de um mês já foram vendidos 50 kg do produto, qual a probabilidade de se venderem mais de 100 kg no fim desse mês?
- (c) Calcule o valor médio mensal e a mediana mensal das vendas daquele produto.
- (d) O lucro, Y , da venda do referido produto é função de vários fatores. Considere a seguinte expressão (simplificada) do lucro em função das vendas, $Y = 50X - 25$.
- Qual o valor esperado do lucro mensal?
 - Qual a probabilidade de, num dado mês, não haver prejuízo?